Παράρτημα ΙΙ
Προσδιορισμός μητρώου προοπτικής προβολής

Στην ενότητα αυτή υπολογίζουμε τους συντελεστές του μητρώου προοπτικής προβολής στη γενικότερη περίπτωση της πλάγιας παράλληλης προβολής. Για την απλούστευση των εξισώσεων, ακολουθούμε τις εξής παραδοχές (τις οποίες ακολουθούν και οι εντολές της OpenGL):

α) **Το κέντρο προβολής ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων του συστήματος συντεταγμένων παρατηρητή**, δηλαδή:

$$(x_{prp}, y_{prp}, z_{prp}) = (0,0,0)$$

β) **Το επίπεδο προβολής ταυτίζεται με το εγγύς επίπεδο αποκοπής**:

$$z_{vp} = z_{near}$$

Βάσει των παραπάνω παραδοχών, το μητρώο προοπτικής προβολής ανάγεται στη μορφή

$$M_{pers} = \begin{bmatrix} -z_{near} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z_{near} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & t_z \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Όπως και στην περίπτωση της πλάγιας παράλληλης προβολής, αναζητούμε ένα μητρώο μετασχηματισμού κλίσης το οποίο μετασχηματίζει τη σκηνή ούτως ώστε τα περιεχόμενα της πλάγιας πυραμίδας να μεταφερθούν εντός των ορίων μιας συμμετρικής πυραμίδας. Για να επιτύχουμε το μετασχηματισμό αυτό, αρκεί να μεταβάλλουμε τις συντεταγμένες x, y κάθε σημείου συναρτήσει της συντεταγμένης του z. Άρα το μητρώο κλίσης θα έχει τη μορφή

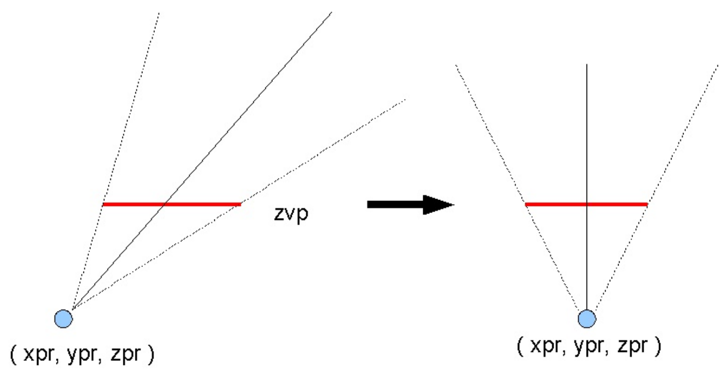
$$M_{shear} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & sh_{zx} & 0 \\ 0 & 1 & sh_{zy} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε τις τιμές των συντελεστών sh_{zx} και sh_{zy} λαμβάνουμε υπόψη μια συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί το μητρώο κλίσης: το κέντρο του επιπέδου προβολής $\left(\frac{xw_{\min}+xw_{\max}}{2}, \frac{yw_{\min}+yw_{\max}}{2}, z_{near}\right)$ της πλάγιας πυραμίδας θα πρέπει να αντιστοιχιστεί στο κέντρο του επιπέδου προβολής $(0,0,z_{near})$ της συμμετρικής πυραμίδας. Επομένως

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_{near} \\ 1 \end{bmatrix} = M_{shear} \cdot \begin{bmatrix} \frac{xw_{\min}+xw_{\max}}{2} \\ \frac{yw_{\min}+yw_{\max}}{2} \\ z_{near} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως οι συντελεστές κλισης που ικανοποιούν την παραπάνω συνθήκη είναι οι εξής:

$$sh_{zx} = -\frac{xw_{\min}+xw_{\max}}{2 \cdot z_{near}}$$
$$sh_{zy} = -\frac{yw_{\min}+yw_{\max}}{2 \cdot z_{near}}$$



Σχ. 4.9: Αναγωγή πλάγιας προοπτικής προβολής σε συμμετρική προοπτική προβολή. Επιβάλλουμε στη σκηνή μετασχηματισμό κλίσης ούτως ώστε τα περιεχόμενα της πλάγιας πυραμίδας να μεταφερθούν στο εσωτερικό μιας συμμετρικής πυραμίδας.

Επισημαίνουμε ότι στην περίπτωση της συμμετρικής προοπτικής προβολής ισχύουν: $xw_{\max} = -xw_{\min}$ και $yw_{\max} = -yw_{\min}$. Επομένως, το μητρώο κλίσης ταυτίζεται με το μητρώο I_4 και δεν υφίσταται μετασχηματισμός κλίσης.

Ο μετασχηματισμός πλάγιας προοπτικής προβολής περιγράφεται από τη σχέση μητρώων:

$$\begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \\ h \end{bmatrix} = M_{oblique,pers} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

όπου:

$$M_{oblique,pers} = M_{pers} \cdot M_{shear} = \begin{bmatrix} -z_{near} & 0 & \dfrac{xw_{\min} + xw_{\max}}{2} & 0 \\ 0 & -z_{near} & \dfrac{yw_{\min} + yw_{\max}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & s_z & t_z \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Το επόμενο βήμα είναι η εκτέλεση της κανονικοποίησης, ούτως ώστε το εύρος των συντεταγμένων $(x_p, y_p, z_p) = \left(\dfrac{x_h}{h}, \dfrac{y_h}{h}, \dfrac{z_h}{h} \right)$ της απομονωμένης σκηνής να αναχθεί στο εύρος τιμών $[-1,1]$.

Για να εκτελέσουμε αυτή την κανονικοποίηση, αναζητούμε ένα μητρώο κλιμάκωσης που επιδρά στις συντεταγμένες των σημείων εντός της συμμετρικής πυραμίδας κατά τρόπο τέτοιο ώστε οι τελικές συντεταγμένες προβολής $(x_p, y_p, z_p) = \left(\dfrac{x_h}{h}, \dfrac{y_h}{h}, \dfrac{z_h}{h} \right)$ να περικλείονται εντός του κύβου κανονικοποίησης. Δηλαδή, πρέπει να επιλυθεί το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot M_{oblique,pers} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

ως προς s_x, s_y, s_z και t_z. Οι παράμετροι αυτές υπολογίζονται βάσει των παρακάτω συνθηκών:

α) Το σημείο $(xw_{\min}, yw_{\min}, z_{near})$ αντιστοιχίζεται στη θέση $(-1,-1,-1)$ του κύβου κανονικοποίησης.

β) Το σημείο $\left(xw_{\max}, yw_{\max}, z_{far}\right)$ αντιστοιχίζεται στη θέση $(1,1,1)$ του κύβου κανονικοποίησης.

Βάσει των συνθηκών αυτών, για τις τέσσερις άγνωστες παραμέτρους, προκύπτουν οι τιμές:

$$s_x = \frac{2}{xw_{\max} - xw_{\min}}$$

$$s_y = \frac{2}{yw_{\max} - yw_{\min}}$$

$$s_z = \frac{z_{near} + z_{far}}{z_{near} - z_{far}}$$

$$t_z = \frac{2 \cdot z_{near} \cdot z_{far}}{z_{near} - z_{far}}$$